Jednodušší příklady na vyšetřování funkcí, definovaných implicitně – viz příklady ke cvičení 22.4.2015.

Funkce definované implicitně

1. (implicitní funkce dvou proměnných)
   Ukažte, že rovnicí $F(x,y,z)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) definována implicitně funkce $z=f(x,y)$, která má v okolí bodu (x_0,y_0) spojité parciální derivace druhého řádu. Pak
   (i) určete první a druhý diferenciál funkce f v bodě (x_0,y_0);
   (ii) napište rovnici tečné roviny a normály k ploše, definované rovnicí $F(x,y,z)=0$, v bodě (x_0,y_0,z_0), když:
   a) $F(x,y,z)=z^3-2xz+y$, $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,1)$;
   b) $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xyz-4$, $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,2)$;
   c) $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\log\dfrac{z}{y}$, $(x_0,y_0,z_0)=(0,1,1)$;
   d) $F(x,y,z)=e^{z-2x}-xz+2yz-2y-xy^2$; $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$.

2. (i) Nechť funkce $F(x,y,z)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) a nechť platí $F(x_0,y_0,z_0)=0$. Odvoďte rovnici tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ v bodě (x_0,y_0,z_0) za předpokladu, že aspoň jedna z parciálních derivací 1.řádu funkce F je v bodě (x_0,y_0,z_0) nenulová.
   (ii) Napište rovnici tečné roviny a vektorovou rovnici normály v bodě (x_0,y_0,z_0) k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$, když
   a) $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz-6$, $(x_0,y_0,z_0)=(1,2,-1)$;
   b) $F(x,y,z)=x\sin z+y\cos z-e^z$, $(x_0,y_0,z_0)=(2,1,0)$.

3. (Soustavy implicitně definovaných funkcí.)

   a) Ukažte, že soustava rovnic
   $$x^2+y^2=z,\ x+y+z=2 \qquad (*)$$
   má v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,2)$ řešení ve tvaru $y=y(x)$, $z=z(x)$. Určete $y'(-1)$ a $z'(-1)$ a tečný vektor ke křivce, dané rovnicemi (*), v bodě $(-1,1,2)$.

   b) Ukažte, že soustava rovnic
   $$x^3+y^3-z^3=10,\ x+y+z=0$$
   má v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,-2)$ řešení ve tvaru $y=y(x)$, $z=z(x)$. Napište aproximace těchto řešení pomocí Taylorova polynomu druhého stupně.

   c) Ukažte, že soustava rovnic
   $$x+y-2u^2+v^2=0,\ x-y-uv=0$$
   má v okolí bodu $(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,0,1,1)$ řešení ve tvaru funkcí $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Určete Jacobiho matici zobrazení $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ v bodě $(1,0)$.

4. Rozhodněte, kdy je rovnicí $G(x,y,z)=0$ definována implicitní funkce $z=z(x,y)$, je-li $G(x,y,z)=F(\frac{y}{x},\frac{z}{y})$. Ukažte, že potom platí $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.